II pre Olimpiada Matemática Autonómica

Enunciados y Soluciones

9 y 10 de noviembre de 2024

Índice

1 Enunciados del nivel de iniciación 2

2 Enunciados del nivel avanzado 4

3 Problema 1 nivel inicial 6

4 Problema 2 nivel inicial / 1 nivel avanzado 7

5 Problema 3 nivel inicial / 2 nivel avanzado 9

6 Problema 3 nivel avanzado 11

7 Problema 4 nivel inicial 13

8 Problema 5 nivel inicial / 4 nivel avanzado 14

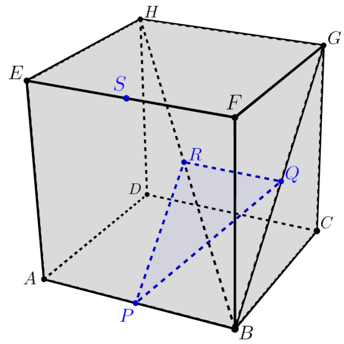
9 Problema 5 nivel avanzado 15

10 Problema 6 nivel inicial 17

11 Problema 6 nivel avanzado 18

1. Enunciados del nivel de iniciación

Problema 1. Sea $ABCDEFGH$ un cubo de lado 1, con los vértices distribuidos tal como indica el diagrama. Definimos P como el punto medio del segmento AB, Q como el punto medio del segmento BG, y R como el punto medio del segmento BH.



(a) Determina razonadamente el área del triángulo PQR.

(b) Sea S el punto medio del segmento EF. Demuestra que el volumen de la pirámide de vértices $PQRS$ es $\frac{1}{24}$.

Problema 2. Decimos que un número entero positivo n es k-especial si ninguna de sus cifras es cero y, para cualquier reordenación de las cifras de n, el número resultante
es múltiplo de k.
Sea $m \geq 2$ un número entero positivo.

(a) Demuestra que existe exactamente un número 5-especial de m cifras.

(b) Determina razonadamente la cantidad de números 3-especiales de m cifras.

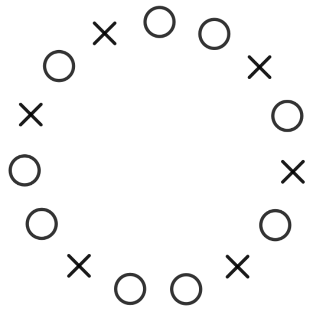
(c) Determina razonadamente la cantidad de números 4-especiales de m cifras.

Problema 3. Marc tiene un tablero cuadriculado 2024×2024, y una cantidad ilimitada de manzanas rojas y verdes. Marc quiere disponer las manzanas en el tablero, de forma que se cumplan las siguientes condiciones.

- Cada casilla del tablero contiene exactamente una manzana, ya sea verde o roja.
- Todas las filas y columnas del tablero contienen al menos una manzana roja.
- No hay dos filas o columnas con la misma combinación de colores de manzanas, donde las filas se leen de izquierda a derecha, y las columnas se leen de arriba a abajo. En particular, no puede haber una fila y una columna con la misma combinación de colores.

Determina el mínimo número de manzanas rojas que Marc necesita para llenar el tablero.

Problema 4. Hay 15 monedas dispuestas formando una circunferencia tal como muestra el diagrama. Una X indica una cruz, y una O indica una cara.



Cada segundo, si quedan más de dos monedas en la circunferencia y al menos una de ellas tiene su lado cara hacia arriba, Marc puede hacer un movimiento. Un movimiento consiste en elegir una moneda con el lado cara hacia arriba, voltear las dos monedas que tiene adyacentes, y retirarla de la circunferencia.

Este proceso sigue hasta que Marc ya no puede mover. Si, llegado a este punto, solo quedan en la circunferencia dos monedas de orientación distinta, entonces Marc podrá usar el dinero que ha conseguido para comprar fruta. ¿Puede Marc cumplir su objetivo?

Nota: Después de retirar una moneda, las dos monedas volteadas pasan a ser adyacentes. En otras palabras, cada moneda tiene siempre dos monedas adyacentes.

Problema 5. Sea ABC un triángulo, y sea D un punto sobre el lado BC. X es un punto sobre el segmento AD tal que la recta CX es paralela a la bisectriz del ángulo $\angle ADB$. Similarmente, Y es un punto sobre el segmento AD tal que la recta BY es paralela a la bisectriz del ángulo $\angle ADC$.

(a) Demuestra que los triángulos DBY y DCX son isósceles.

(b) Sea E un punto sobre el lado BC tal que BD y EC tienen la misma longitud. Demuestra que DE y XY tienen la misma longitud.

Problema 6. Responde a las siguientes cuestiones.

(a) Determina razonadamente la cantidad de parejas de números enteros (a, b) tales que

$$ab + 3a + 5b = 20.$$

(b) Razona si existe algún entero k tal que haya exactamente 2024 parejas de enteros positivos (a, b) satisfaciendo

$$ab + 3a + 5b = k.$$

Nota: Las parejas son ordenadas. Por ejemplo, consideramos $(7, 8)$ y $(8, 7)$ como parejas distintas.

2. Enunciados del nivel avanzado

Problema 1. Decimos que un número entero positivo n es k-especial si ninguna de sus cifras es cero y, para cualquier reordenación de las cifras de n, el número resultante es múltiplo de k.
Sea $m \geq 2$ un número entero positivo.

(a) Determina razonadamente la cantidad de números 3-especiales de m cifras.

(b) Determina razonadamente la cantidad de números 4-especiales de m cifras.

Problema 2. Marc tiene un tablero $n \times n$, donde $n \geq 3$ es entero, y una cantidad ilimitada de manzanas rojas y verdes. Marc quiere disponer las manzanas en el tablero, de forma que se cumplan las siguientes condiciones.

- Cada casilla del tablero contiene exactamente una manzana, ya sea verde o roja.
- Todas las filas y columnas del tablero contienen al menos una manzana roja.
- No hay dos filas o columnas con la misma combinación de colores de manzanas, donde las filas se leen de izquierda a derecha, y las columnas se leen de arriba a abajo. En particular, no puede haber una fila y una columna con la misma combinación de colores.

Encuentra, en función de n, el mínimo número de manzanas rojas que Marc necesita para llenar el tablero.

Problema 3. Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω, y sea P un punto sobre el arco BC de Ω que no contiene a A. Sean ω_B y ω_C dos circunferencias tangentes a la recta AP en P y que pasan por B y por C, respectivamente. Sean R, R_B, R_C los radios de Ω, ω_B, y ω_C, respectivamente.
Demuestra que si h es la distancia de A a la recta BC, entonces

$$\frac{R_B + R_C}{R} \leq \frac{BC}{h}.$$

Problema 4. Sea ABC un triángulo, y sean D y E dos puntos sobre el lado BC tales que BD y EC tienen la misma longitud. X es un punto sobre el segmento AD tal que la recta CX es paralela a la bisectriz del ángulo $\angle ADB$. Similarmente, Y es un punto sobre el segmento AD tal que la recta BY es paralela a la bisectriz del ángulo $\angle ADC$.
Demuestra que los segmentos DE y XY tienen la misma longitud.

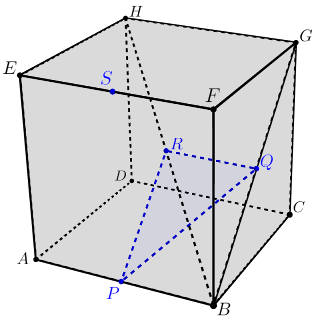
Problema 5. Demuestra que no existen enteros positivos a, b, c tales que el polinomio

$$P(x) = x^3 - 2^a x^2 + 3^b x - 6^c$$

tiene tres raíces enteras.

Problema 6. Dado un entero positivo $n \geq 3$, Arándano y Banana juegan a un juego. Inicialmente, los números $1, 2, 3, \ldots, n$ están escritos en la pizarra. Alternadamente, los jugadores van borrando los números de la pizarra, empezando Arándano, hasta que quedan exactamente tres números en la pizarra. Banana gana si los tres números finales son los lados de un triángulo no degenerado, y Arándano gana en el caso contrario.
Determina, en función de n, quién tiene estrategia ganadora.

3. Problema 1 nivel inicial



Problema 1. Sea $ABCDEFGH$ un cubo de lado 1, con los vértices distribuidos tal como indica el diagrama. Definimos P como el punto medio del segmento AB, Q como el punto medio del segmento BG, y R como el punto medio del segmento BH.

(a) Determina razonadamente el área del triángulo PQR.

(b) Sea S el punto medio del segmento EF. Demuestra que el volumen de la pirámide de vértices $PQRS$ es $\frac{1}{24}$.

Solución (a). La observación clave es que el ángulo $\angle PRQ$ (es decir, el ángulo con R enmedio y extremos P y Q) es de 90 grados. Por tanto, como PRQ es rectángulo en R, su área será $\frac{1}{2}RP \cdot RQ$.

Observa que $RQ = \frac{1}{2}$ mide la mitad que un lado del cubo. Para calcular RP podemos usar el teorema de Pitágoras. Considera M como el punto medio de la cara $ABFE$ del cubo. Este M cumple que $RM = PM = \frac{1}{2}$, y que $\angle RMP = 90°$. Por tanto, por Pitágoras, deducimos que

$$RP = \sqrt{RM^2 + PM^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, concluimos que el área de PQR es

$$\frac{1}{2}RP \cdot RQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{2}}}.$$

Solución (b). La idea es usar 24 tetraedros idénticos a $PQRS$ para llenar todo el interior del cubo, demostrando así que el volúmen de $PQRS$ es igual al volúmen del cubo entre 24. Cuando decimos que dos cuerpos son idénticos, queremos decir que tienen la misma forma, es decir, que uno se puede obtener a base de mover, rotar, o hacer simetrías del otro.

Observa que R es el centro del cubo, y que Q es el centro de la cara del cubo donde se encuentra. Observa ahora que los tetraedros $PQRS$ y $FBQR$ tienen el mismo volúmen, ya que son simétricos. Ahora considera los tres tetraedros $RQFG$, $RQGC$ y $RQCB$, que resultan de rotar $FBQR$ alrededor de Q. Estos tres tetraedros y $FBQR$ son idénticos, y entre ellos llenan el interior de la pirámide con base $BCGF$ y punta R. Este mismo procedimiento se puede realizar no solo respecto a la cara $BCGF$, pero respecto a cualquier cara del cubo. Por lo que acabamos de ver, cualquier pirámide de punta R y con base una cara del cubo tiene cuatro veces el volumen de $PQRS$.

Usando las seis pirámides de punta R y base una cara del cubo, se completa todo el interior del cubo. Como cada una de estas pirámides tiene cuatro veces el volumen de $PQRS$, resulta que el volumen del cubo es $4 \cdot 6$ veces el volumen de $PQRS$, tal como se pedía demostrar.

Comentarios. También se puede hacer el apartado (b) usando la fórmula del volumen de un tetraedro, pero no es necesario.

4. Problema 2 nivel inicial / 1 nivel avanzado

Decimos que un número entero positivo n es k-especial si ninguna de sus cifras es cero y, para cualquier reordenación de sus cifras, el número resultante es múltiplo de k.
Sea $m \geq 2$ entero positivo.

(a) Demuestra que existe exactamente un número 5-especial de m cifras.

(b) Determina razonadamente la cantidad de números 3-especiales de m cifras.

(c) Determina razonadamente la cantidad de números 4-especiales de m cifras.

Solución (a). Observamos que un número 5-especial solo puede tener la cifra 5. Un número es múltiplo de 5 si y solo si su última cifra es 0 o 5. Por tanto, si un número n es 5-especial, no puede tener ninguna cifra c diferente de 0 o 5, ya que entonces podríamos reordenar las cifras de n de manera que c quedara en las unidades, dando lugar a un número no múltiplo de 5. Como un número 5-especial no puede tener ninguna cifra cero, deducimos que el único número 5-especial de m cifras es el $555\ldots555$ con m cifras 5. □

Solución (b). La respuesta es 3^{2m-1}. Usaremos el criterio de divisibilidad por 3, que dice que un número es múltiplo de 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Por tanto, un número es 3-especial si y solo si no tiene la cifra 0 y la suma de sus cifras es múltipla de 3.

Supón que queremos formar un número 3-especial n. Primero, observa que hay 9^{m-1} maneras de elegir las primeras $m-1$ cifras de n. Supón que las hemos elegido y su suma es s. Ahora, la última cifra a de n puede ser cualquier entero entre 1 y 9 tal que $a+s$ es múltiplo de 3. La observación es que siempre hay tres elecciones posibles para a.

- Si s es múltiplo de 3, entonces a puede ser 3, 6 o 9.
- Si s tiene residuo 1 al dividir entre 3, entonces s puede ser 2, 5 o 8.
- Si s tiene residuo 2 al dividir entre 3, entonces s puede ser 1, 4 o 7.

Concluimos que hay 9^{m-1} formas de elegir las primeras $m-1$ cifras, y 3 maneras de elegir la ultima. Por tanto la respuesta es, efectivamente, $9^{m-1} \cdot 3 = 3^{2m-1}$. □

Solución (c). La respuesta es 2^m. Usaremos el criterio de divisibilidad por 4, que dice que un número es múltiplo de 4 si y solo si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4. Supón que n es un número 4-especial. Esto nos dice que para todas cifras distintas a y b de n el número $\overline{ab} = 10a + b$ con cifras a y b ha de ser mútliplo de 4. Nota que como $m \geq 2$, n siempre tendrá almenos dos cifras.

Observa que n no puede tener cifras impares. Por supuesto, si n tuviera alguna cifra impar, cualquier reordenación de n con una dicha cifra en las unidades resultaría en un número no múltiplo de 4.

Vemos ahora que 2 y 6 no pueden ser cifras de n. Supón por contradicción que n tiene la cifra 2, y que tiene otra cifra a. Si $a=2$ entonces 22 no es múltiplo de 4, si $a=4$ entonces 42 falla, si $a=6$ entonces 26 falla, y si $a=8$ entonces 82 falla. Similarmente, si n tiene la cifra 6 y otra cifra a, si $a=2$ entonces 26 falla, si $a=4$ entonces 46 falla, si $a=6$ entonces 66 falla, y si $a=8$ entonces 86 falla.

Por tanto n solo puede tener cifras 4 y 8. Como 48 y 84 ambos son múltiplos de 4, resulta que los números 4-especiales son exactamente los números de m cifras cuyas cifras son solo 4 y 8. Por tanto hay 2^m números 4-especiales de m cifras. $\square$

Comentarios. En el nivel avanzado solo se pidieron los apartados (b) y (c).

5. Problema 3 nivel inicial / 2 nivel avanzado

Marc tiene un tablero $n \times n$, donde $n \geq 4$ es entero, y una cantidad ilimitada de manzanas rojas y verdes. Marc quiere disponer las manzanas en el tablero, de forma que se cumplan las siguientes condiciones.

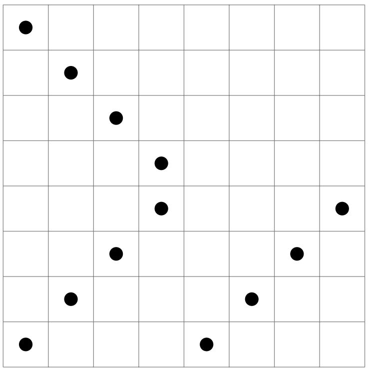
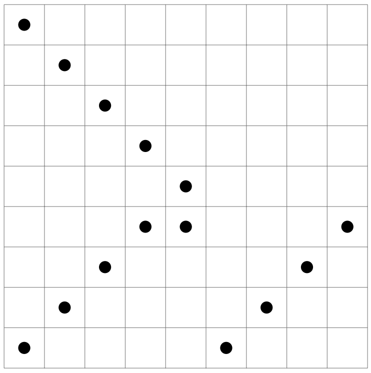
- Cada casilla del tablero contiene exactamente una manzana, ya sea verde o roja.
- Todas las filas y columnas del tablero contienen al menos una manzana roja.
- No hay dos filas o columnas con la misma combinación de colores de manzanas, donde las filas se leen de izquierda a derecha, y las columnas se leen de arriba a abajo. En particular, no puede haver una fila y una columna con la misma combinación.

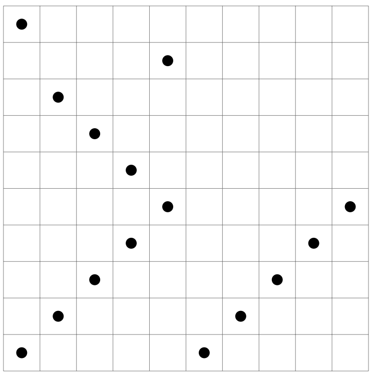
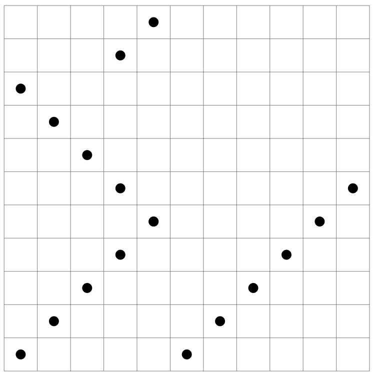
Encuentra, en función de n, el mínimo número de manzanas rojas que Marc necesita para llenar el tablero.

Solución. Veremos que la respuesta es $\left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$, donde $\lceil \bullet \rceil$ denota la función techo. Decimos que una disposición de manzanas es *válida* si cumple las restricciones del enunciado.

Construcción. Daremos una disposición válida usando $\left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$, donde $\lceil \bullet \rceil$ manzanas rojas. Haremos cuatro casos en función del valor de n módulo 4, todos ellos con la misma idea.

Mostramos los cuatro casos via sus ejemplos para $n = 8, 9, 10, 11$.

En los diagramas, los puntos denotan manzanas rojas, y los espacios vacíos denotan manzanas verdes. Los diagramas se extienden de la manera intuitiva al resto de valores de n. Es directo demostrar que estos cuatro patrones funcionan. La motivación de la construcción es el caso n múltiplo de 4, y los otros tres casos requieren arreglos para hacerlo funcionar. El caso $n = 3$ se tiene que hacer aparte, pero es sencillo.

Cota. Veamos ahora que cualquier disposición válida con k manzanas rojas se cumple que $k \geq \frac{3n}{2}$. La idea es considerar el número de manzanas rojas en cada una de las $2n$ filas y columnas del tablero. Sea f_i la cantidad de manzanas rojas en la fila i, y c_i la cantidad de manzanas rojas en la columna i. Observa que

$$2k = \sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

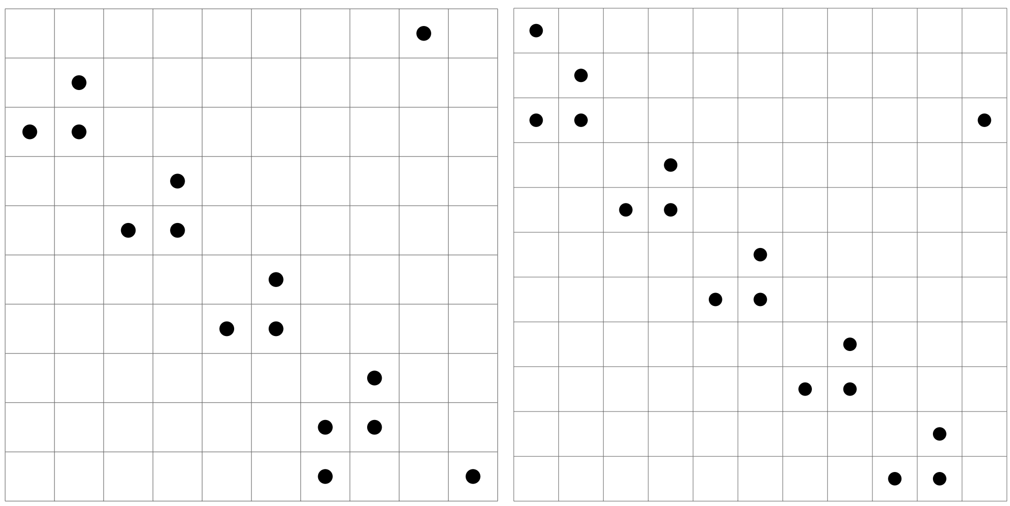
Observa que r_i y c_i nunca son cero por la primera condición. Más allá, por Palomar, el valor 1 aparece como mucho n vences entre las r_i y las c_i. Por tanto, resulta que

$$2k = \sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n} r_i \geq n \cdot 1 + n \cdot 2 = 3n.$$

De aquí sigue que $k \geq \frac{3n}{2}$, tal como queríamos demostrar. □

Comentarios. La versión del nivel inicial solo pedía el caso $n = 2024$. La demostración es exactamente la misma, pero la construcción es más sencilla ya que no requiere hacer casos.

Es interesante notar que hay otras construcciones posibles a parte de la oficial. Por ejemplo, las siguientes construcciones para $n = 10, 11$ se extienden fácilmente para servir para toda n par e impar, respectivamente.



El problema también se puede hacer de manera similar si se retira la condición de que toda fila y columna tiene al menos una manzana roja. La respuesta sale $\left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil - 1$. La demostración de la cota es la misma, pero la construccion resulta un poco más difícil de hacer.

6. Problema 3 nivel avanzado

Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω, y sea P un punto sobre el arco BC de Ω que no contiene a A. Sean ω_B y ω_C dos circunferencias tangentes a la recta AP en P y que pasan por B y por C, respectivamente. Sean R, R_B, R_C los radios de Ω, ω_B, y ω_C, respectivamente.
Demuestra que si h es la distancia de A a la recta BC, entonces

$$\frac{R_B + R_C}{R} \leq \frac{BC}{h}.$$

Solución. Sean O, O_B y O_C los centros de Ω, ω_B y ω_C, respectivamente. La observación clave será la siguiente:

Claim 6.1 — Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle OO_CO_B$ son semejantes.

Demostración. Primero démonos cuenta de que al ser ω_B y ω_C tangentes a la misma recta (AP) en el mismo punto (P), entonces son tangentes entre sí en P. Por lo tanto, O_B, P y O_C están alineados. Ahora observemos que $\angle PO_BO = \frac{1}{2}\angle PO_BB$ porque OO_B es la mediatriz de BP. Por lo tanto, debido a la tangencia de AP a ω_B, obtenemos que

$$\angle ACB = \angle APB = \angle PO_BO = \angle O_CO_BO.$$

Similarmente se obtiene que $\angle ABC = \angle OO_CO_B$, lo que demuestra el claim. □

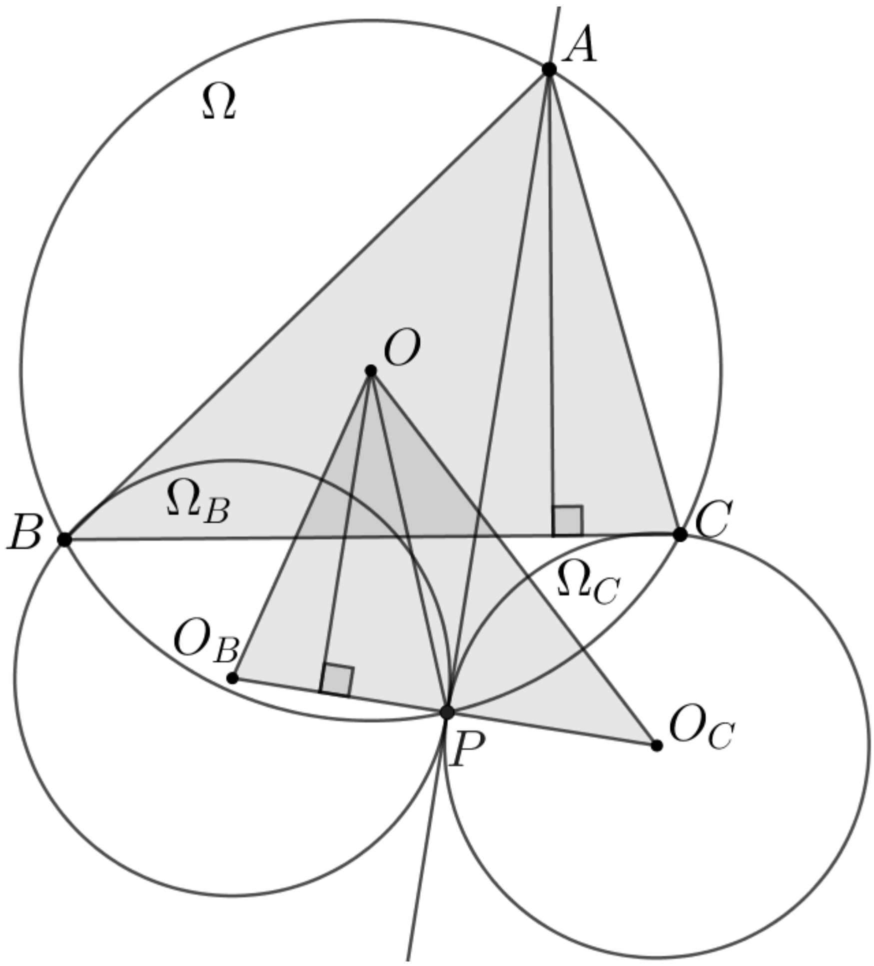
Una vez demostrado esto, si definimos Q como el pie de la altura de O a O_BO_C se tiene que

$$\frac{R_B + R_C}{OQ} = \frac{BC}{h}$$

por semejanza, ya que en ambos casos estamos haciendo el cociente de una base por su respectiva altura. Pero ahora, nota que OQ es la distancia más corta entre O y un punto de O_BO_C, así que $R = OP \leq OQ$, lo que implica que

$$\frac{R_B + R_C}{R} \leq \frac{R_B + R_C}{OQ} = \frac{BC}{h},$$

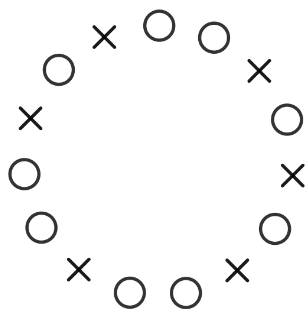
que acaba el problema. □



Comentarios. Aunque parezca que este vaya a ser un problema de longitudes y de calcular mucho, la solución es totalmente sintética. La única cota usada es que la distancia de un punto a una recta es mínima en el segmento perpendicular.

7. Problema 4 nivel inicial

Problema 4. Hay 15 monedas dispuestas formando una circunferencia tal como muestra el diagrama. Una X indica una cruz, y una O indica una cara.



Cada segundo, si quedan más de dos monedas en la circunferencia y al menos una de ellas tiene su lado cara hacia arriba, Marc puede hacer un movimiento. Un movimiento consiste en elegir una moneda con el lado cara hacia arriba, voltear las dos monedas que tiene adyacentes, y retirarla de la circunferencia.

Este proceso sigue hasta que Marc ya no puede mover. Si, llegado a este punto, solo quedan en la circunferencia dos monedas de orientación distinta, entonces Marc podrá usar el dinero que ha conseguido para comprar fruta. ¿Puede Marc cumplir su objetivo?

Nota: Después de retirar una moneda, las dos monedas volteadas pasan a ser adyacentes. En otras palabras, cada moneda tiene siempre dos monedas adyacentes.

Solución. La respuesta es que no. La observación clave es que la paridad del número de monedas con el lado cruz hacia arriba no cambia después de cada operación. Veamos por qué. Cada vez que Marc hace un movimiento, se pierde una cara. Luego pueden pasar tres cosas:

- Si las dos monedas adyacentes son caras, se vuelven cruces, y el número de cruces aumenta en dos.
- Si una de las monedas adyacentes es cara y la otra cruz, entonces el número de cruces se mantiene.
- Si las dos monedas adyacentes son cruces, se vuelven caras, y el número de crucues disminuye en dos.

Por tanto, la paridad del número de cruces presentes en el círculo no varía a lo largo del proceso. En la configuración inicial dada hay un número par de monedas cruz. Por tanto, si solo quedan dos monedas al final del proceso, han de ser o las dos caras o las dos cruz: de otro modo, no se habría mantenido la paridad del número de cruces. □

8. Problema 5 nivel inicial / 4 nivel avanzado

Sea ABC un triángulo, y sean D y E dos puntos sobre el lado BC tales que BD y EC tienen la misma longitud. X es un punto sobre el segmento AD tal que la recta CX es paralela a la bisectriz del ángulo $\angle ADB$. Similarmente, Y es un punto sobre el segmento AD tal que la recta BY es paralela a la bisectriz del ángulo $\angle ADC$.
Demuestra que los segmentos DE y XY tienen la misma longitud.

Solución. La observación clave es la siguiente.

Claim — Los triángulos DCX y DBY son ambos isósceles en D.

Demostración. Denota por ℓ_B y ℓ_C las bisectrices de los ángulos $\angle BDA$ y $\angle CDA$, respectivamente. Usamos la notación $\angle(r, s)$ para denotar el ángulo entre las rectas r y s.

Tenemos que

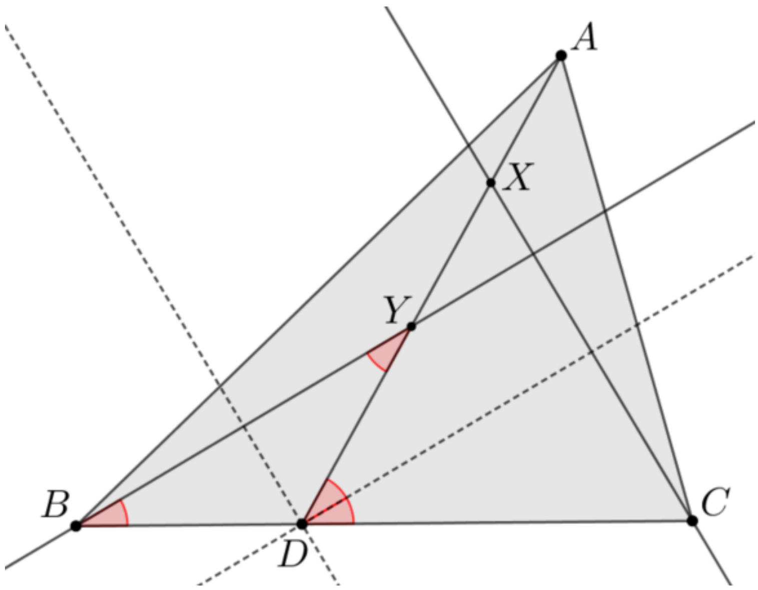
$$\angle BYD = \angle(YD, \ell_C) = \angle(\ell_C, DC) = \angle YBD.$$

La primera igualdad y la tercera usan que BY es paralela a ℓ_C, la segunda usa que ℓ_C es la bisectriz de $\angle ADC$. Esto nos dice directamente que BDY es isósceles en D, y de manera análoga por el otro lado se demuestra que DCX es isósceles. ■

Ahora podemos acabar. Por el claim, tenemos que $BD = YD$ y que $XD = CD$. Por tanto, llegamos a que

$$XY = XD - DY = DC - DB = DE.$$

El caso en el que X está por debajo de Y en el segmento AD es análogo. □



Comentarios. En el nivel inicial se pidió también un apartado (a) intermedio, que pedía demostrar los dos isósceles del claim.

9. Problema 5 nivel avanzado

Demuestra que no existen enteros positivos a, b, c para los que el polinomio

$$P(x) = x^3 - 2^a x^2 + 3^b x - 6^c$$

tiene tres raíces enteras.

Solución. Empezamos observando que, como los coeficientes de $P(x)$ altenan de signo, $P(x)$ no puede tener raíces reales negativas. Además, $P(0)$ claramente es distinto de 0. Supongamos, por contradicción, que $P(x)$ tiene tres raíces enteras x, y, z, que han de ser enteras positivas por lo que acabamos de ver. Por Cardano-Vieta, sabemos que

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2^a, \\ xy + yz + zx &= 3^b, \\ xyz &= 6^c. \end{aligned}$$

La tercera equación nos dice que x, y, z han de ser divisores de 6^c. Nota que, por la primera igualdad, x, y, z son o bien los tres pares o bien uno par y dos impares. Pero por la segunda igualdad, x, y, z no pueden ser los tres pares. Por tanto exactamente un número entre x, y, z es par, supongamos sin pérdida de generalidad que es x. Como $xyz = 6^c$, tenemos dos posibilidades.

1. $x = 2^c$, y por tanto y, z son dos potencias de 3 cuyo producto es 3^c. Por tanto $x = 2^c$, $y = 3^p$, $z = 3^q$ para algunas p, q con $p + q = c$.
2. $x = 2^c \cdot 3^p$ para alguna p con $0 \leq p \leq c$, luego $y = 1$, y $z = 3^q$ donde $p + q = c$.

Separaremos el resto del argumento en estos dos casos.

Caso 1. Si reescribimos las dos primeras igualdades, obtenemos que

$$\begin{aligned} 2^c + 3^p + 3^q &= 2^a, \\ 2^c \cdot 3^p + 2^c \cdot 3^q + 3^{p+q} &= 3^b. \end{aligned}$$

Considera la segunda igualdad. La podemos reescribir como

$$2^c = \frac{3^b - 3^{p+q}}{3^p + 3^q}.$$

Por el signo, es necesario que $b > p + q$. Pero ahora, como $p + q \geq \text{máx}\{p, q\} \geq \text{mín}\{p, q\}$ y almenos una de esas dos desigualdades es estricta, se sigue instantáneamente que el lado derecho de la igualdad es múltiplo de 3, que es imposible.

Caso 2. En este caso, las igualdades se vuelven

$$\begin{aligned} 1 + 2^c \cdot 3^p + 3^q &= 2^a \\ 2^c \cdot 3^{p+q} + 2^c \cdot 3^p + 3^q &= 3^b. \end{aligned}$$

Además, como $P(1) = 0$, sabemos que $2^a + 6^c = 3^b + 1$. Podemos reescribir la segunda igualdad como

$$2^c = \frac{3^b - 3^q}{3^p + 3^{p+q}}.$$

Esto nos dice directamente que $\min\{b, q\} = \min\{p, p+q\} = p$. Si $b = p$, obtenemos directamente una contradicción por tamaño de la igualdad $2^a + 6^c = 3^b + 1$. Por tanto asume $p = q$, por lo que $c = 2p$ y $b \geq p$. Nota que $b > p$. Nuestra igualdad se reescribe como

$$2^{2p} = 2^c = \frac{3^b - 3^p}{3^{2p} - 3^p} = \frac{3^{b-p} - 1}{3^p + 1}.$$

No obstante, esto llega a contradicción directa mirando módulo 3. Por supuesto, tenemos que

$$1 \equiv 4^p \equiv 2^{2p} \equiv \frac{3^{b-p} - 1}{3^p + 1} \equiv \frac{-1}{1} \equiv -1 \pmod{3}$$

y contradicción. □

Comentarios. Es interesante notar que sí que es posible que $P(x)$ tenga tres raíces reales positivas grandes. Por ejemplo, $P(x) = x^3 - 2^9 x^2 + 3^{10} x - 6^8$ tiene raíces aproximadamente 43.4, 107.1, 361.5. También es posible encontrar raíces enteras del polinomio si eliminamos alguna condición sobre los coeficientes:

$$x^3 - 16x^2 + 51x - 36 = (x - 12)(x - 3)(x - 1)$$
$$x^3 - 16x^2 + 81x - 126 = (x - 7)(x - 6)(x - 3)$$

10. Problema 6 nivel inicial

Responde a las siguientes cuestiones.

(a) Determina razonadamente la cantidad de parejas de números enteros (a, b) tales que

$$ab + 3a + 5b = 20.$$

(b) Razona si existe algún entero k tal que haya exactamente 2024 parejas de enteros positivos (a, b) satisfaciendo

$$ab + 3a + 5b = k.$$

Nota: Las parejas son ordenadas. Por ejemplo, consideramos $(7, 8)$ y $(8, 7)$ como parejas distintas.

Solución. La idea para ambos apartados es reescribir la ecuación dada. En particular, las siguientes igualdades son equivalentes

$$ab + 3a + 5b = k \iff ab + 3a + 5b + 15 = k + 15 \iff (a + 5)(b + 3) = k + 15.$$

Trabajaremos con esta última igualdad.

Solución (a). Tal como acabamos de ver, la ecuación $ab + 3a + 5b = 20$ es equivalente a

$$(a + 5)(b + 3) = 35.$$

Las soluciones con a, b enteros de esta ecuación corresponden a los pares de divisores de 35 con producto igual a 35. Nota que 35 tiene en total 8 divisores positivos y negativos, que son

$$1,\ 5,\ 7,\ 35,\ -1,\ -5,\ -7,\ -35.$$

Elegido el valor entre estos ocho que tome $a + 5$, el valor de $b + 3$ está únicamente determinado. Por ejemplo, si $a + 5 = -7$, entonces por fuerza $b + 3 = -5$. Por tanto, resulta que hay 8 pares. □

Solución (b). La respuesta es sí. En particular, $k = 2^{1011} - 15$ funciona. Como en el apartado (a), la idea es reescribir

$$ab + 3a + 5b = k \iff (a + 5)(b + 3) = k + 15.$$

Ahora, por el argumento del apartado (a), queremos que $k + 15$ tenga exactamente 2024 divisores positivos y negativos. Por tanto, queremos que $k + 15$ tenga 1012 divisores positivos. Por ejemplo, elegir $k + 15 = 2^{1011}$ cumple nuestro propósito, ya que 2^{1011} tiene 1012 divisores, que son 1, 2, 2^2, ..., 2^{1011}. En conclusión, $k = 2^{1011} - 15$ funciona. □

Comentarios. La factorización usada es un truco habitual, y se conoce como truco de Simón.

11. Problema 6 nivel avanzado

Dado un entero positivo $n \geq 3$, Arándano y Banana juegan a un juego. Inicialmente, los números $1, 2, 3, \ldots, n$ están escritos en la pizarra. Alternadamente, los jugadores van borrando los números de la pizarra, empezando Arándano, hasta que quedan exactamente tres números en la pizarra. Banana gana si los tres números finales son los lados de un triángulo no degenerado, y Arándano gana en el caso contrario.
Determina, en función de n, quién tiene estrategia ganadora.

Solución. Llamamos A a Arándano y B a Banana. La respuesta es que A tiene estrategia ganadora si y solo si n es 3, 5, o cualquier número par. A lo largo de la solución, usaremos la desigualdad triangular, que dice que tres números a, b, c con $a < b < c$ forman un triángulo no degenerado si y solo si $a + b > c$. El argumento se divide en tres casos.

Caso 1. Estrategia ganadora para B si $n \geq 7$ es impar. Nota que si n es impar, A y B ambos moverán $\frac{n-3}{2}$ veces. La estrategia para B es la siguiente. En sus primeros $\frac{n-3}{2} - 1$ movimientos, B borrará el número más pequeño que quede en la pizarra. Llegado a su último movimiento, B hace dos casos.

- Si los únicos cuatro números que quedan el la pizarra son
$$\frac{n-3}{2},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n+1}{2},\ n,$$
entonces B borra el n.
- En cualquier otro caso, B borra el número más pequeño de la pizarra.

Veamos que esta estrategia funciona. Después de sus primeros $\frac{n-3}{2} - 1$ movimientos, B se ha asegurado que todos los números restantes en la pizarra sean mayores o iguales que $\frac{n-3}{2}$. Por tanto, tras el último movimiento de A, quedarán en la pizarra cuatro numeros enteros a, b, c, d con
$$\frac{n-3}{2} \leq a < b < c < d \leq n.$$
Nota entonces que
$$b + c \geq \frac{n-3}{2} \cdot 2 + 3 = n \geq d.$$
Por tanto, B gana tras borrar a, con la única excepción del caso
$$a = \frac{n-3}{2},\ b = \frac{n-1}{2},\ c = \frac{n+1}{2},\ d = n.$$
Veamos que borrar n funciona en este caso. Por supuesto, si $n \geq 7$, entonces
$$a + b = \frac{n-3}{2} + \frac{n-1}{2} = n - 2 \geq \frac{n}{2} + \frac{7}{2} - 2 > \frac{n+1}{2} = c,$$
por lo que a, b, c son los lados de un triángulo no degenerado, y B gana.

Caso 2. Estrategia ganadora para A si $n = 3$ o $n = 5$. Si $n = 3$, A gana nada más empezar la partida, sin tener que hacer nada. Si $n = 5$, A gana fácilmente si empieza borrando el 4. Por supuesto, tras el movimiento de B, las únicas posibilidades de posición final son $(2,3,5)$, $(1,3,5)$, $(1,2,5)$, $(1,2,3)$. Como ninguna de estas triplas forma un triángulo no degenerado, concluimos que A gana.

Caso 3. Estrategia ganadora para A si n es par. Nota que en este caso A hará $\frac{n}{2}-1$ movimientos, y B hará $\frac{n}{2}-2$ movimientos. La estrategia para A es la siguiente. Sea $k=\frac{n}{2}+1$. En el primer turno, A borrará k. A partir de este momento, si B borra un número mayor que k, entonces A contesta borrando el mayor número menor que k restante; y si B borra un número menor que k, entonces A borra el menor número mayor que k restante.

Veamos ahora que esta estrategia es válida. Supón que, tras el último movimiento de A, quedan tres números $a<b<c$ en la pizarra. Queremos demostrar que $a+b\geq c$. Observa que, como cada dos turnos se borra un número mayor que k y uno menor que k, se cumple que $a<b<k<c$. Supón que, durante la partida, B ha borrado r números menores que k y $\frac{n}{2}-2-r$ números mayores que k. Por la estrategia de A, esto nos permite deducir que

$$a<b\leq k-\left(\frac{n}{2}-2-r\right)-1=r+2$$

y por tanto $a+b\leq(r+1)+(r+2)=2r+3$. Similarmente, deducimos que

$$c\geq k+r+1=\frac{n}{2}+r+2.$$

Por tanto, como $a+b\geq 2r+3$ y $c\leq\frac{n}{2+r+2}$, tenemos que

$$a+b\geq 2r+3\geq\frac{n}{2}+r+2\geq c,$$

donde la desigualdad central sale de que $r\leq\frac{n}{2}-2$. Como $a+b\geq c$, A gana. □